De l'astrolabe au télémètre-laser

Mesurer la hauteur d'une construction est une étape essentielle dans la constitution d'un dossier d'inventaire, souvent embarrassante, ou que l'édifice soit trop haut pour une mesure directe, ou que sa position sur le terrain le rende pratiquement inaccessible.

Le hasard de mes lectures m'a fait récemment découvrir que ce problème avait trouvé sa solution il y a ... au moins cinq siècles ! Je vais donc vous raconter cette découverte et la commenter. Pour cela, il me faudra faire un peu de géométrie, mais très élémentaire. Cependant je m'excuse auprès de ceux chez qui cette matière provoque de l'urticaire ; ils trouveront leur salut dans la fuite.

***

Le Musée du Louvre et les éditions Hazan viennent de publier (juillet 2011) un superbe catalogue de la collection d'enluminures que le musée conserve et qui couvre une période allant du Moyen Âge à la Renaissance. Y sont reproduites, parmi de nombreuses autres, une dizaine d'enluminures peintes par Geoffroy Dumonstier (un enlumineur né à Rouen à une date inconnue, mort à Paris le 13 octobre 1573) destinées à illustrer un livre, *Elucidatio fabricæ ususque astrolabii*, dédié à l'empereur Maximilien, publié en latin en 1512, dont l'auteur, Johann Stöffel, était astronome à l'université de Tübingen. Cet ouvrage, disponible en ligne sur internet, comprend grosso modo trois parties : la première décrit les éléments constitutifs d'un astrolabe, la seconde le mode d'emploi pour les mesures astronomiques, la troisième, celle qui nous intéresse directement, concerne les usages géométriques de l'instrument. Je fais évidemment totalement abstraction de la seconde de ces parties.

***

De la première partie je me borne à extraire ce qui est utile pour comprendre les usages décrits dans la troisième.

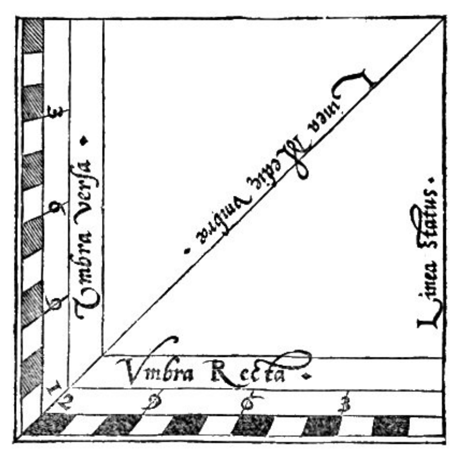


Fig. 1

La figure 1 représente un détail agrandi de la figure 2. Sur cette dernière on voit un cercle gradué (inutile pour nos mesures) partagé en quatre quadrants par deux axes perpendicu1aires, l'un vertical, l'autre horizontal. Au centre du cercle, les deux quadrants inférieurs sont occupés par deux carrés symétriques. La figure 1 représente l'un d'entre eux. Deux de leurs cotés sont gradués en douze parties égales : les cotés horizontaux sont nommés umbra recta, les verticaux umbra versa, termes qu'il faudrait sans doute traduire par "projection droite" et "projection renversée", ce qui pourra se justifier plus bas.

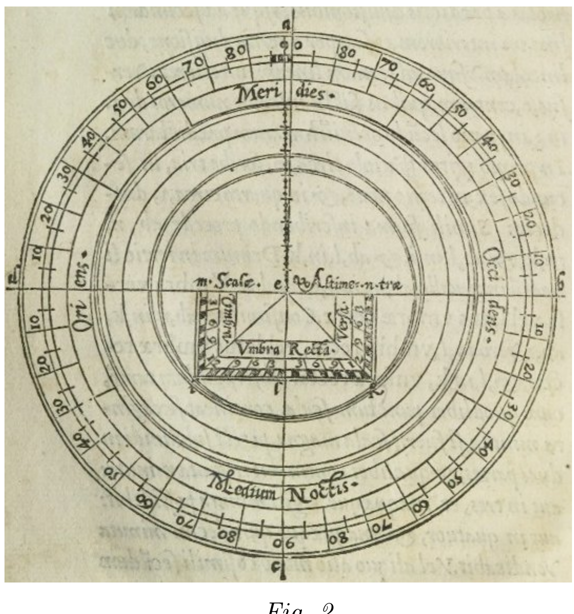


Fig. 2

Une alidade (fig.3) tournant autour du centre du cercle permet de faire les visées.



Fig. 3

L'instrument est muni d'un anneau de suspension qui permet à l'opérateur de le tenir dans la position verticale.

Usages géométriques de l'astrolabe

I - Mesure de la hauteur d'un édifice dont la base est accessible

L'observateur (taille T) placé en A à une distance D du pied de la tour vise son sommet et il mesure sur umbra versa la projection (inversée) PQ de la partie de la tour de hauteur h qui se trouve au-dessus de sa tête. On lit 5,3.

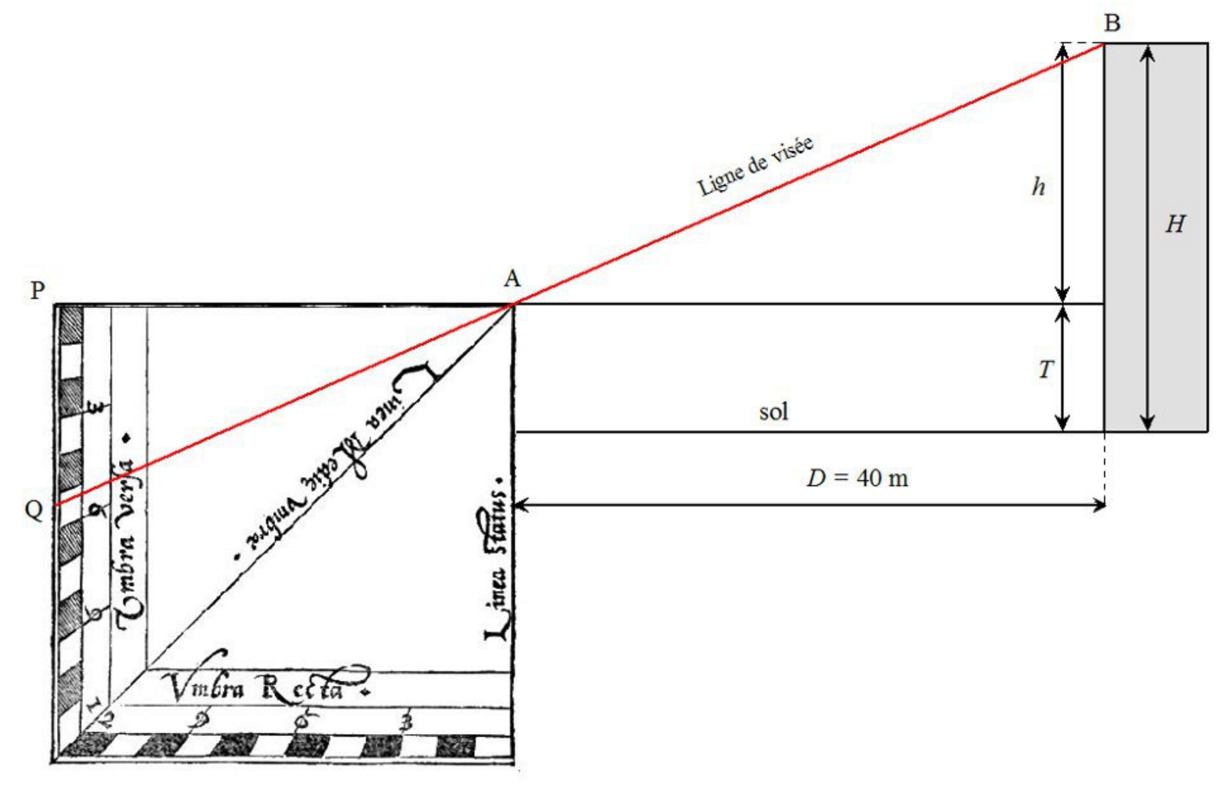


Fig. 4

Selon Stöffel, la hauteur h s'obtient de la manière suivante : on divise 12 par 5,3 ce qui donne 2,26 ; on divise 40 par ce nombre, ce qui donne $h = 17{,}67$ m. Il suffit alors d'ajouter

la taille T, disons 1,80 m, à h pour avoir la hauteur totale de la tour, soit $H = h + T = 19{,}47$ m.

Cette méthode de calcul, qui relève des recettes de cuisine, se justifie cependant aisément par application du théorème de Thalès selon lequel

$$\frac{h}{\text{PQ}} = \frac{D}{\text{AP}}$$

Mais si h est supérieur à D, le calcul à faire est un peu différent.

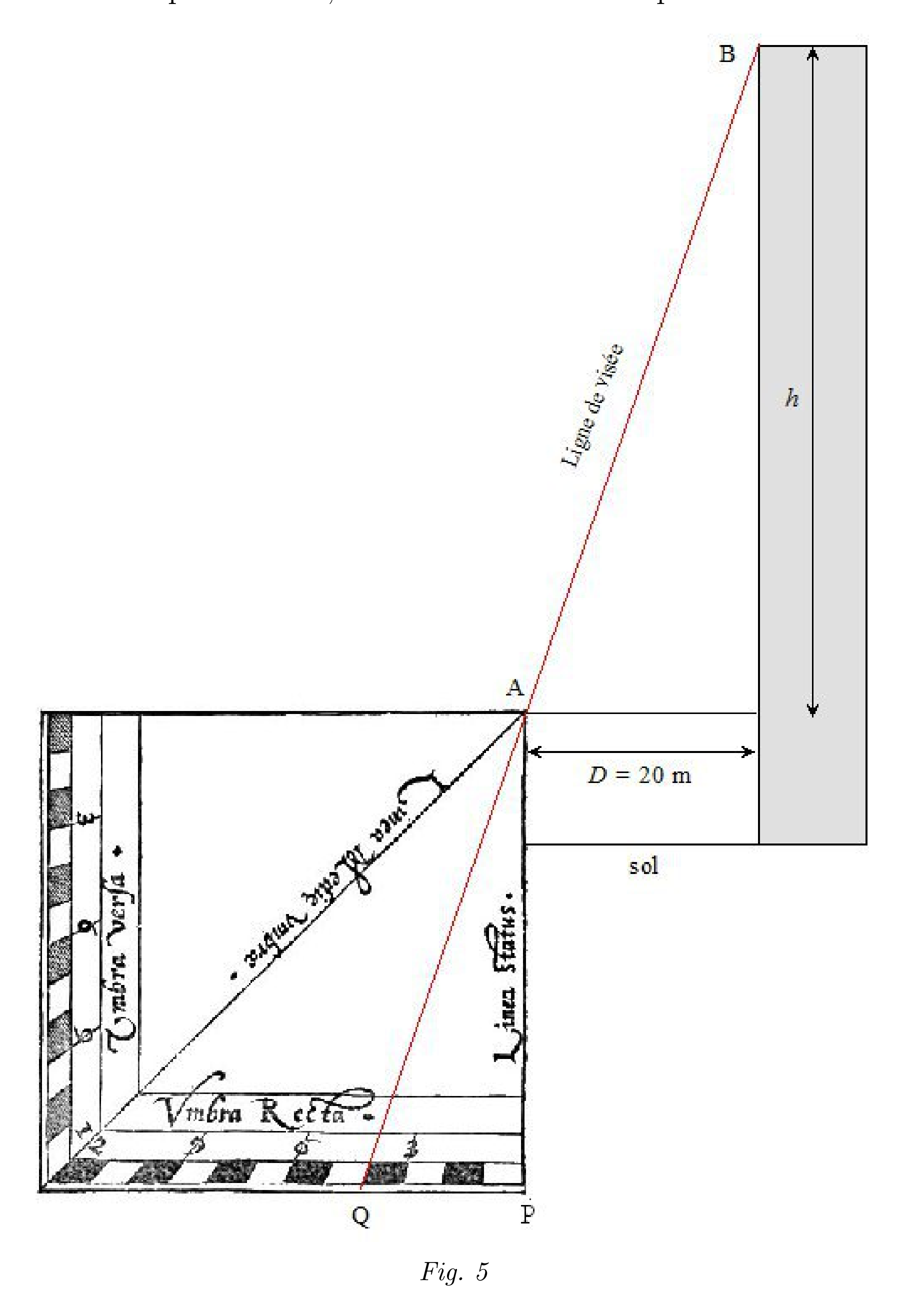


Fig. 5

Ici on lit la projection horizontale PQ sur umbra recta, soit 4, nombre par lequel on divise 12, ce qui donne 3 que l'on multiplie par $D = 20$. Le résultat, 60 m, est la hauteur h cherchée. En effet, selon le théorème de Thalès

$$\frac{h}{D} = \frac{\text{AP}}{\text{PQ}}$$

Le télémètre-laser mesure directement les distances D et AB et calcule par simple pression sur une touche la hauteur h par application du théorème de Pythagore.

II - Mesure de la hauteur d'un édifice dont la base est inaccessible

On peut envisager ici le cas d'une tour construite sur une éminence qu'il est difficile d'escalader, mais aussi celui de la mesure d'une hauteur au faîtage d'une construction à l'intérieur de laquelle il est impossible d'entrer. Ces cas correspondent à des situations où on ne peut mesurer, même avec un télémètre-laser, la distance D définie sur les figures précédentes.

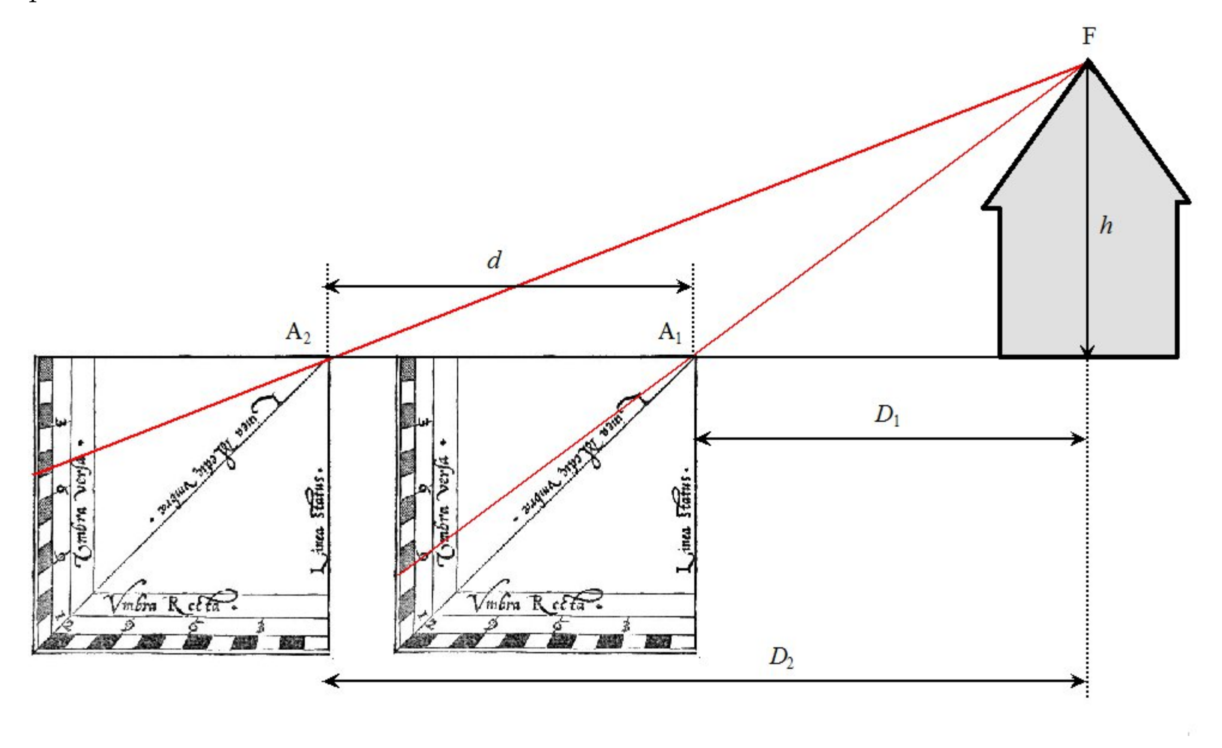


Fig. 6

Reportons-nous à la figure ci-contre et suivons la recette de Stöffel. Placé en A_1, on lit 9 sur umbra versa et 4,7 en A_2. On divise 12 par ces deux nombres ce qui donne 1,333 et 2,553 respectivement. On soustrait le plus petit de ces nombres du plus grand et on obtient 1,220. La distance d des positions où sont faites les deux mesures étant de 10 m, la hauteur h cherchée est égale à $10/1{,}22 = 8{,}2$ m.

Il me faut bien maintenant justifier ce calcul. Reportons-nous au paragraphe I.

Placé en A_1, il permet d'écrire :

$$\frac{h}{P_1Q_1} = \frac{D_1}{12}$$

et, en A_2

$$\frac{h}{P_2Q_2} = \frac{D_2}{12}$$

avec $D_2 - D_1 = d$

Mais

$$D_1 = \frac{12}{P_1Q_1} \times h \quad \text{et} \quad D2 = \frac{12}{P_2Q_2} \times h$$

ce qui donne bien :

$$d = D_2 - D_1 = (\frac{12}{\mathrm{P_2Q_2}} - \frac{12}{\mathrm{P_1Q_1}}) \times h$$

ou bien : 10 = (2,553 - 1,333) $\times h$ = 1,22 h c'est-à-dire le résultat Stöffel.

Posons l'astrolabe et saisissons-nous du télémètre-laser. Il nous est toujours impossible de mesurer D_1 et D_2, mais on pourra mesurer les distances séparant $\mathrm{A_1}$ de F, puis $\mathrm{A_2}$ de F, soit respectivement x et y. Il faut donc trouver le moyen de calculer h à partir de x, y et d.

Il y a deux manières de calculer la surface S du triangle $\mathrm{A_1A_2F}$.

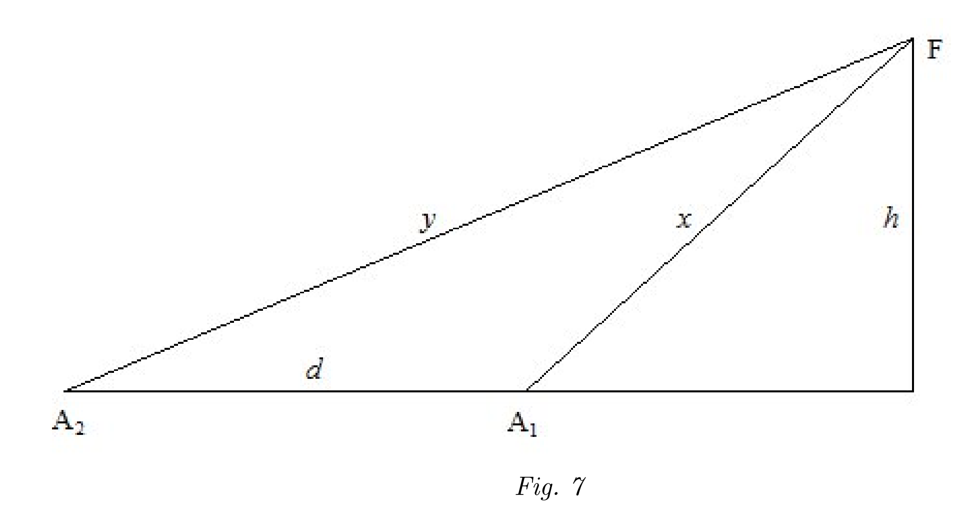


Fig. 7

Tout le monde sait qu'elle est égale au demi-produit de la base par la hauteur :

$$S = \frac{h \times d}{2}$$

Moins connue est la formule de Héron d'Alexandrie. Si p est le périmètre du triangle, $p = x + y + d$

On pose $p = 2q$, alors, selon la formule de Héron : $S^2 = q(q-x)(q-y)(q-d)$

D'où

$$h = \frac{2}{d}\sqrt{q(q-x)(q-y)(q-d)}$$

À moins de savoir extraire une racine carrée, il nous faudra le secours d'une calculatrice car le télémètre n'a pas en mémoire le programme qui permettrait ce calcul.

Le problème sera un peu plus compliqué si la tour dont il faut mesurer la hauteur est érigée sur une éminence inaccessible. Dans ce cas, il faudra répéter les mesures décrites ci-dessus, une première fois pour le sommet, la seconde pour la base. Nous aurons donc à faire quatre visées ou quatre mesures télémétriques.

J'ai reproduit à la page suivante la figure qui illustre le cas précédent dans le livre de Johann Stöffel et au-dessous l'enluminure peinte par Geoffroy Dumonstier pour illustrer une édition française de ce livre, peut-être destinée au duc d'Anjou Hercule François de Valois. Elles nous donnent une idée de ce qu'aurait été notre travail de mesureur si nous étions nés cinq siècles plus tôt.

Fig. 8



Fig. 9

Conclusion

Et si nous devions choisir entre astrolabe et télémètre ? Que ferions-nous ? Un sentiment de modernité conduirait évidemment la majorité d'entre nous à choisir aveuglément le télémètre. En regardant de près et uniquement pour ce que nous avons à faire, il y a pourtant matière à réflexion.

Chacun de nous pourrait se bricoler un astrolabe qui couterait infiniment moins cher que l'achat d'un télémètre. L'argument décisif se tire de la précision qui est évidemment bien meilleure avec un télémètre. Mais une telle précision n'est-elle pas en réalité illusoire ? Les dimensions des monuments qui font l'objet de nos inventaires ne sont souvent, à cause des dégradations et de l'usure des temps, définies qu'à quelques centimètres près dans les meilleurs des cas (sauf restaurations vigoureuses et indiscrètes).

En définitive, tout le monde optera pour le laser, mais le problème du choix méritait d'être posé.

Jean Darriné 2012